**Частотный критерий устойчивости Попова**

         Рассмотрим нелинейные системы, структурные схемы которых можно привести к виду, показанному на рисунке 3.5. В этой структурной схеме имеется безынерционный нелинейный элемент с характеристикой

                                                                                                            (3.21)

и линейная часть с передаточной функцией *W (s),*имеющей статический коэффициент передачи, равный единице, и импульсной переходной функцией *.*Все воздействия приведены к одному входу и обозначены *.*



Рисунок 3.5 - Структурная схема системы с безынерционным нелинейным элементом

 Изображение решения дифференциального уравнения системы выразим через изображения воздействия *F (s)*и координаты :

                                           .                              (3.22)

Переходя к оригиналам, получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

                                .              (3.23)

Будем рассматривать систему при таких воздействиях, кото­рые ограничены по модулю и являются исчезающими функциями времени. Обозначим максимальное воздействие  (supremum).

Исчезающей функцией времени  назовем функцию, стремя­щуюся с течением времени к нулю:

                                                      .

Если воздействие отсутствует, то из (3.23) следует

                                                  .                           (3.24)

Если нелинейная характеристика проходит через начало координат, т. е. Ф(0)=0, то уравнение (3.24) имеет тривиаль­ное решение:

                                                                                                               (3.25)

которое соответствует положению равновесия.

Положение равновесия устойчиво в смысле Ляпунова, если существует такое положительное число , что при 

имеет место неравенство  **(3.26)

где *А* — сколь угодно малое положительное число.

В зависимости от того, при каких значениях  выпол­няется неравенство (3.26) будем различать три вида устойчивости: устойчивость в малом, если  бесконечно малая величина; устойчивость в большом, если  - конечная величина, и устойчивость в це­лом, если  не ограничено.

Изложим ча­стотный метод определения устойчивости, предложенный  В. М. Попо­вым [5], при использовании которого задача решается более просто приемами, аналогичными частотным способам ис­следования устойчивости линейных систем.

Если в системе автоматического регулирования имеется лишь одна однозначная  нелинейность

                                                   *,*(3.27)

то, объединив вместе все остальные (линейные) уравнения системы, можно всегда получить общее уравнение линейной части системы (см. рисунок 3.6, *а*) в виде:

**,                           (3.28)

где    ,

,

причем будем считать *т < п.*



Рисунок 3.6 - Система автоматического регулирования с однозначной  нелинейностью

Пусть нелинейность *y=F(x)*имеет любое очертание, не выходящее за пределы заданного угла *arctg* *k*(см. рисунок 3.6, *б*), т. е. при любом *х*,

                  0< *F(x)*< *kx.*(3.29)

Пусть многочлен   *Q(p)*,или что одно и то же, характеристическое уравнение линейной части *Q(p)*=0, имеет все корни с отрицательными вещественными частями или же, кроме них, имеется еще не более двух нулевых корней. Другими словами, допускается, чтобы  или  и  в выражении *Q(p)*,т. е*.*не более двух нулевых полюсов в передаточ­ной функции линейной части системы:

       .

Приведем без доказательства формулировку теоремы В.М.По­пова: для установления устойчивости нелинейной системы доста­точно подобрать такое конечное действительное число *h*, при котором при всех 

                                        ,                              (3.30)

где  - амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части системы.

При наличии одного нулевого полюса требуется еще, чтобы

        при  ,

а при двух нулевых полюсах  при , a    при   малых   .

Теорема справедлива также и при наличии в знаменателе *Q(p)*передаточной   функции   линейной   части  не более   двух   чисто мнимых корней, но при этом требуются некоторые другие простые добавочные условия [5], называемые условиями предельной устойчивости.

Другая формулировка той же теоремы, дающая удобную гра­фическую интерпретацию, связана с введением видоизмененной частотной характеристики **, которая определяется следую­щим образом:



График  имеет вид (см. рисунок 3.7, *а*), аналогичный , когда в выражениях *Q(p)*и *R(p)*разность степеней *п-* *т*>1. Если же разность степеней *,*то конец графика  будет на мнимой оси ниже начала координат (см. рисунок 3.7, *б).*

Далее, выполнив соответствующие математические преобразования,  рассмотрим следующую  графическую интерпретацию тео­ремы В. М. Попова.



 Рисунок 3.7 - Видоизмененные частотные характеристики ** к формулировке теоремы В. М. Попова

Преобразуем   левую  часть  неравенства   (3.30):

                         .         (3.31)

Тогда, положив

  

и использовав соотношение (3.31), получим вместо (3.30) для теоремы            В. М. Попова условие:

                                                                                    (3.32)

при всех .

Очевидно,  что равенство

                                        (3.33)

представляет уравнение прямой на плоскости .

Отсюда вытекает следующая графическая интерпретация тео­ремы        В. М. Попова: для установления устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такую прямую на плоскости ,  проходящую через точку ****, чтобы вся кривая  лежала справа от этой прямой.

На рисунке 3.8 приведена графическая интерпретация тео­ремы              В. М. Попова для установления устойчивости нелинейной системы. Как видно, рисунки 3.8, *а* и 3.8, *б*соответствуют устойчивым системам, а рисунки 3.8, *в* и 3.8, *г* – неустойчивым.



Рисунок 3.8 - Графическая интерпретация тео­ремы  В. М. Попова для определения устойчивости нелинейной системы